



Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

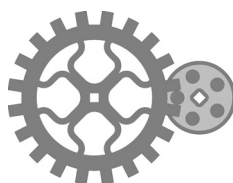
Teoria de Màquines i Mecanismes

Exàmens Curs 2024-2025

Lluïsa Jordi Nebot

Joan Puig Ortiz

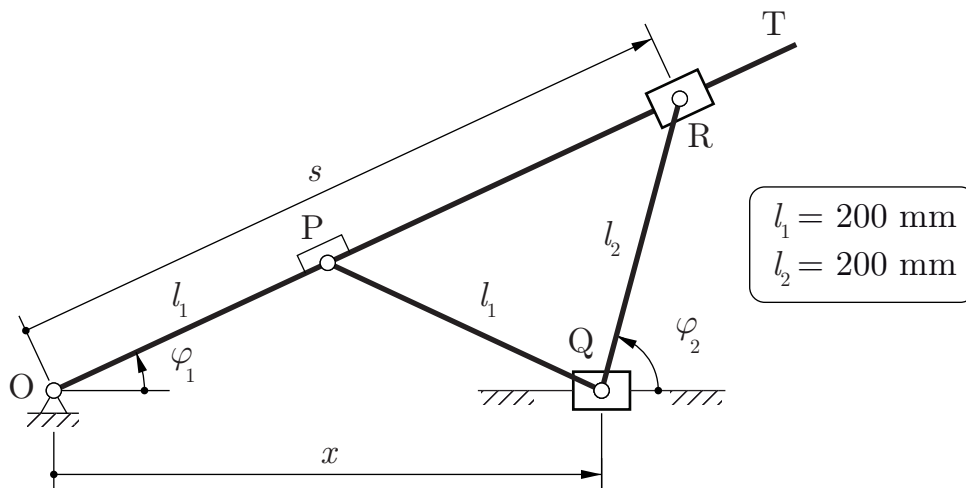
Enrique Zayas Figueras



Departament d'Enginyeria Mecànica

- Contingut del sobre: Enunciat, 3 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material.**
- Per realitzar els dos exercicis es disposa d'una hora i quart.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'un full A4 manuscrit original.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i els fulls reutilitzables en el sobre.

Exercici 1 [6 punts]



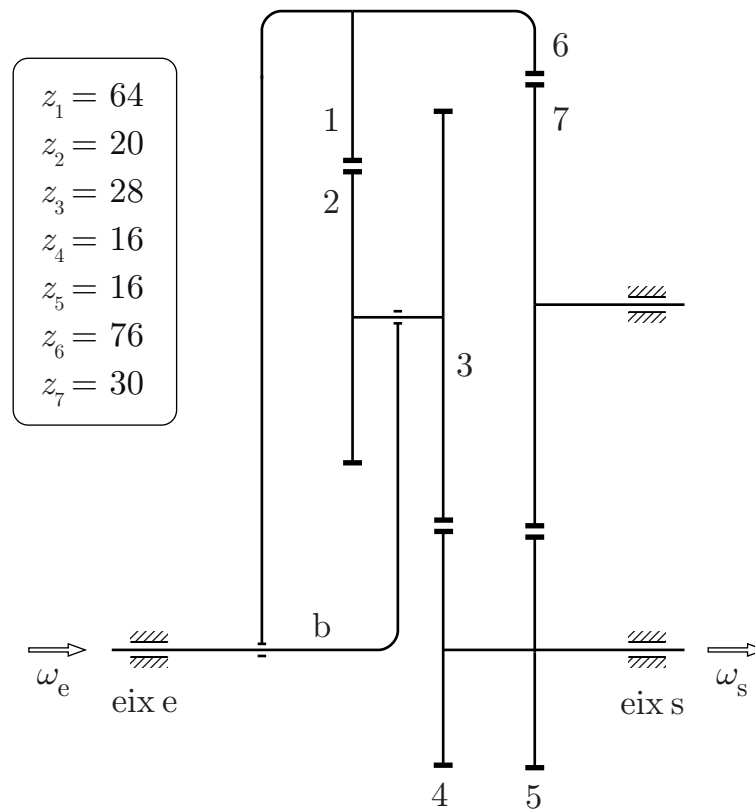
L'esquema de la figura correspon al d'un mecanisme multiplicador d'angles. El mecanisme s'acciona mitjançant un motor i un tren d'engrenatges, no mostrats, que controlen la rotació de la barra OT.

Per realitzar l'anàlisi cinemàtica del mecanisme s'empra el vector de coordenades generalitzades $\mathbf{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, x, s\}^T$. Determineu.

- El nombre de graus de llibertat del mecanisme i la possible existència de redundàncies. Justifiqueu adequadament les vostres respostes.
- Les equacions d'enllaç geomètriques entre les coordenades generalitzades i la seva matriu jacobiana $\Phi_{\mathbf{q}}$.
- El centre instantani de rotació de la guia OT respecte la barra QR, $I_{OT/QR}$, i el centre instantani de rotació de la barra QR respecte al terra, $I_{QR/terra}$.
- El valor de totes les coordenades generalitzades en les dues configuracions de punt mort de la coordenada x .
- La relació de velocitats angulars $\dot{\varphi}_2/\dot{\varphi}_1$ en les dues configuracions de punt mort de la coordenada x .



Exercici 2 [4 punts]



En el tren d'engranatges de la figura totes les rodes dentades són del mateix mòdul m . Per a la seva anàlisi cinemàtica s'utilitza el vector de velocitats generalitzades $\mathbf{u} = \{\omega_1, \omega_b, \omega_5\}^T$. Determineu:

- El nombre de graus de llibertat del tren d'engranatges. Justifiqueu la vostra resposta.
- El valor de la relació de transmissió $\tau_1 = \omega_5 / \omega_1$.
- El valor de la relació de transmissió $\tau = \omega_s / \omega_e$.



Solució – Exercici 1

- a) Si s'atura la translació de la corredora Q, $\dot{x} = 0$, el punt Q queda fix a terra i es forma un triangle indeformable OPQ. Amb el punt Q aturat, la corredora R no es pot moure ja que hauria de girar entorn del punt Q la qual cosa és incompatible amb traslladar-se sobre la guia OT. S'ha aturat una velocitat i el mecanisme queda totalment quiet. Per tant, el mecanisme té un grau de llibertat.

Per altra banda, es pot observar que el mecanisme està format per un conjunt pistó-biela-manovella OPQ i un grup d'Assur format per la biela QR i la corredora R i les articulacions Q, R i el parell prismàtic entre la corredora R i la guia OT.

Si s'aplica el criteri de superposició de restriccions del moviment (criteri de Grübber-Kutzbach) dona un número igual a 1.

$$5 \cdot (\text{sòlids mòbils}) \times 3 - 5 \cdot (\text{articulacions}) \times 2 - 2 \cdot (\text{p. prismàtics}) \times 2 = 1.$$

El mecanisme no presenta redundàncies totals ja que coincideixen el nombre de graus de llibertat i el número de Grübber-Kutzbach.

- b) Com que s'empren 4 coordenades generalitzades i només n'hi ha una d'independent cal determinar 3 equacions d'enllaç geomètriques. Dues s'obtenen, per exemple, imposant el tancament de l'anell ORQO i la tercera es pot determinar a partir de l'anell OPQ.

$$\begin{cases} s \cos \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2 - x = 0 \\ s \sin \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2 = 0 \\ 2l_1 \cos \varphi_1 - x = 0 \end{cases} \rightarrow \Phi(\mathbf{q}) = 0$$

La matriu jacobiana s'obté derivant les equacions d'enllaç geomètriques respecte a les coordenades generalitzades.

$$\Phi_q(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -s \sin \varphi_1 & l_2 \sin \varphi_2 & -1 & \cos \varphi_1 \\ s \cos \varphi_1 & -l_2 \cos \varphi_2 & 0 & \sin \varphi_1 \\ -2l_1 \sin \varphi_1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- c) Per respondre aquest apartat s'empra la següent nomenclatura:

Terra: sòlid 0; guia OT: sòlid 1; barra PQ: sòlid 2; barra QR: sòlid 3; corredora Q: sòlid 4; corredora R: sòlid 5.

L'aplicació del teorema dels tres centres a les ternes de sòlids 1-2-3 i 1-3-5 permet determinar el centre instantani de rotació $I_{13} \equiv I_{OT/QR}$.



El centre instantani de rotació I_{12} és el punt P, el centre instantani de rotació I_{23} és el punt Q; per tant I_{13} es troba sobre la recta que uneix els punts P i Q.

El centre instantani de rotació I_{35} és el punt R, el centre instantani de rotació I_{51} es troba a l'infinit en la recta perpendicular a OT que passa pel punt R; per tant I_{13} es troba sobre aquesta recta.

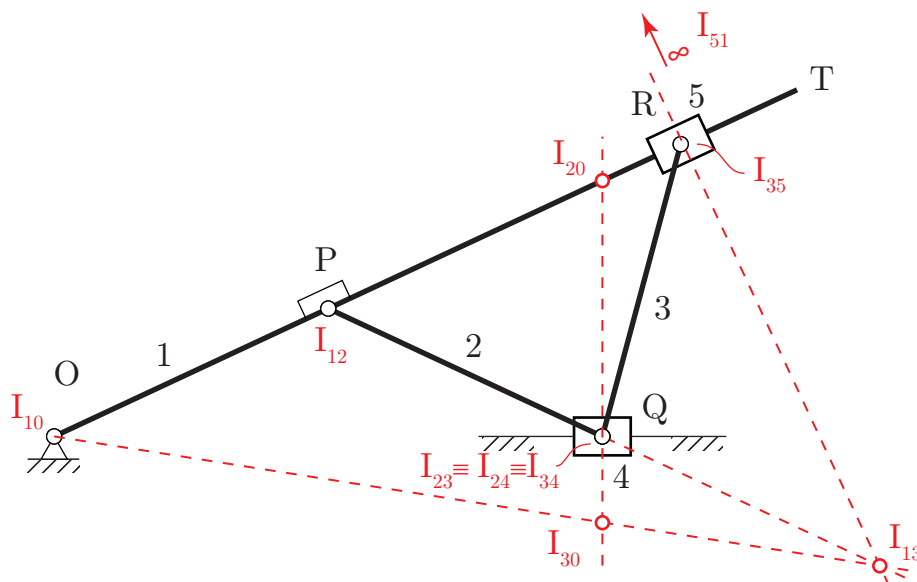
En conseqüència, el centre instantani de rotació I_{13} es troba en la intersecció de la prolongació de la recta PQ amb la recta perpendicular a OT que passa per R (vegeu la figura adjunta).

L'aplicació del teorema dels tres centres a les ternes de sòlids 0-1-3 i 0-2-3 permet determinar el centre instantani de rotació $I_{30} \equiv I_{QR/\text{terra}}$.

El centre instantani de rotació I_{10} és el punt O, el centre instantani de rotació I_{13} és el punt trobat anteriorment; per tant I_{30} es troba sobre la recta que uneix aquests dos punts.

El centre instantani de rotació I_{20} es troba en la intersecció de la recta OP i la recta vertical que passa per Q; el centre instantani de rotació I_{23} és el punt Q; per tant I_{30} es troba sobre la recta que uneix aquests dos punts.

En conseqüència, el centre instantani de rotació I_{30} es troba en la intersecció de la recta vertical que passa per Q i la recta que uneix O i I_{13} (vegeu la figura adjunta).



- d) A les configuracions corresponents als punts morts de la coordenada x els punts O, P i Q es troben sobre la mateixa recta i corresponen a:

L'ordre O-P-Q correspon a $x_{\max}$. Es té:

$$\varphi_1 = 0^\circ, \varphi_2 = 0^\circ, x_{\max} = 2 l_1 = 400 \text{ mm i } s = 2 l_1 + l_2 = 600 \text{ mm.}$$



L'ordre Q-P-O correspon a $x_{\min}$. Es té:

$$\varphi_1 = 180^\circ, \varphi_2 = 180^\circ, x_{\min} = -2 l_1 = -400 \text{ mm i } s = 2 l_1 + l_2 = 600 \text{ mm.}$$

- e) Les configuracions de punt mort per a la coordenada x també ho són per a la coordenada s , com es pot comprovar fàcilment de la primera equació cinemàtica d'enllaç. A partir de la segona equació cinemàtica d'enllaç, i per als dos casos, s'obté:

$$\dot{\varphi}_2 / \dot{\varphi}_1 = s / l_2 = 3.$$

Solució – Exercici 2

- a) El tren d'engranatges de la figura es pot considerar format per un tren epicicloidal simple (1, 2, 3, 4 i braç) i un tren d'eixos fixos (5, 6 i 7).

Si s'atura la rotació de la roda 1 ($\omega_1 = 0$) també s'atura la rotació de la roda 6; en conseqüència les rodes 7 i 5 no giren. Si s'atura la roda 5 tampoc no gira la roda 4. Per tant, tot queda aturat. El tren d'engranatges té 1 grau de llibertat.

- b) La relació $\tau_1 = \omega_5 / \omega_1$ correspon a la relació de transmissió del tren d'eixos fixos ja que $\omega_1 = \omega_6 = \omega_{16}$. Per tant:

$$\tau_1 = \frac{\omega_5}{\omega_{16}} = \left(\pm \right) \frac{\prod z_{\text{conductores}}}{\prod z_{\text{conduïdes}}} = - \frac{z_6 \cdot z_7}{z_7 \cdot z_5} = - \frac{76}{16} = - \frac{19}{4} = -4,75.$$

- c) Si per al tren epicicloidal simple es pren com a entrada la roda 1 i com a sortida la roda 4 es pot escriure:

$$\tau_2 = \frac{\omega_{4/b}}{\omega_{1/b}} = \frac{\omega_4 - \omega_b}{\omega_1 - \omega_b} \rightarrow \tau_2 \omega_1 + (1 - \tau_2) \omega_b - \omega_4 = 0$$

$$\text{amb } \tau_2 = \left(\pm \right) \frac{\prod z_{\text{conductores}}}{\prod z_{\text{conduïdes}}} = - \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4} = - \frac{28}{5} = -5,6.$$

Se sap que: $\omega_1 = \omega_6 = \omega_{16}$ i $\omega_4 = \omega_5 = \omega_{45}$. Per tant, es pot escriure:

$$\tau_1 \omega_{16} - \omega_{45} = 0$$

$$\tau_2 \omega_{16} + (1 - \tau_2) \omega_b - \omega_{45} = 0$$

Operant s'obté la relació de transmissió demanada:

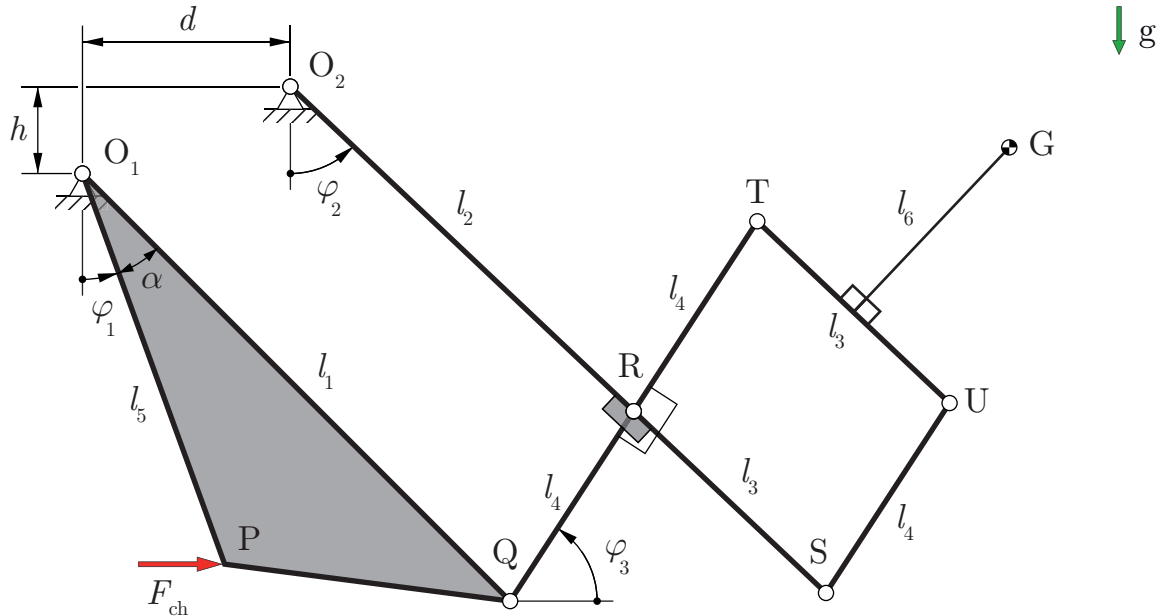
$$\tau = \frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{\omega_{45}}{\omega_b} = \frac{\tau_1 (\tau_2 - 1)}{\tau_2 - \tau_1} = -36,88.$$



Exercici 2 [4 punts]



$l_1 = 160 \text{ mm}$	$l_4 = 60 \text{ mm}$	$d = 55 \text{ mm}$
$l_2 = 125 \text{ mm}$	$l_5 = 110 \text{ mm}$	$h = 23 \text{ mm}$
$l_3 = 70 \text{ mm}$	$l_6 = 60 \text{ mm}$	$\alpha = 25^\circ$



La figura mostra la fotografia i l'esquema de símbols d'un reposacames d'una butaca d'hospital.

Per realitzar-ne l'anàlisi cinemàtica i dinàmica, s'empra el vector de coordenades generalitzades $\mathbf{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^T$. Determineu:

- Les equacions d'enllaç geomètriques entre les coordenades i la seva matriu jacobiana, Φ_q .
- L'alçada y del punt G i la seva velocitat vertical $\dot{y}(G)$.
- Les velocitats angulars $\dot{\varphi}_2$ i $\dot{\varphi}_3$ en funció de $\dot{\varphi}_1$ i de la configuració.

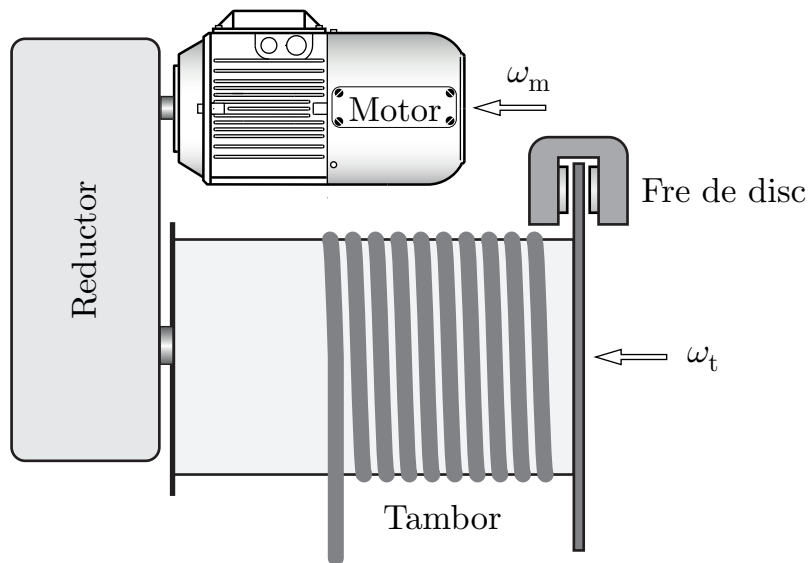
Per elevar el reposacames, un cilindre hidràulic realitza una força F_{ch} , que es pot considerar horitzontal, en el punt P.

Si l'única massa m que es considera és la de les cames que tenen el seu centre d'inèrcia en el punt G i es suposen tots els freds negligibles, determineu:

- La força que ha de realitzar el cilindre hidràulic, F_{ch} , per elevar el reposacames en règim quasiestàtic quan una persona hi té les cames recolzades.
- L'expressió de la força F_{SU} a la qual està sotmesa la barra SU. Especifiquen si la barra SU està sotmesa a tracció o a compressió.



Exercici 3 [3,75 punts]



La figura mostra l'esquema d'un cabrestant (tambor) accionat per un motor elèctric trifàsic asíncron a través d'un reductor. El cabrestant incorpora un fre de disc. Les característiques del sistema són:

- Motor:
- inèrcia del rotor: $I_{\text{mot}} = 0,9 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 - velocitat en règim estacionari: $n_{\text{nom}} = 1450 \text{ min}^{-1}$
 - rendiment electromecànic: $\eta_{\text{em}} = 0,9$
- Reductor:
- inèrcia reduïda a l'eix d'entrada: $I_{\text{red}} = 1,4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 - relació de transmissió: $\tau = 1/32$
- Tambor:
- inèrcia reduïda al seu eix: $I_{\text{tambor}} = 4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 - radi efectiu: $r_{\text{tambor}} = 0,15 \text{ m}$

Les inèrcies no especificades es consideren negligibles. El cabrestant manipula una càrrega de massa $m = 1500 \text{ kg}$.

Durant l'arrencada i fins arribar al règim estacionari, el motor realitza un parell constant $T_{\text{ma}} = 300 \text{ Nm}$.

Les resistències passives mecàniques reduïdes a la rotació del tambor són equivalents a $T_{\text{rp}} = 400 \text{ Nm}$ i es consideren independents de l'estat de càrrega.

Determineu:

- La inèrcia, I_{tot} , de tot el sistema (càrrega inclosa) reduïda a la rotació de l'eix del tambor.
- La potència P_m i el parell T_m del motor necessaris per elevar la càrrega m a la velocitat del règim estacionari i la potència elèctrica P_{elec} consumida.
- El temps d'arrencada, t_a , per pujar la càrrega partint del repòs fins arribar al règim



estacionari i l'alçada h_a recorreguda per la càrrega en aquesta maniobra.

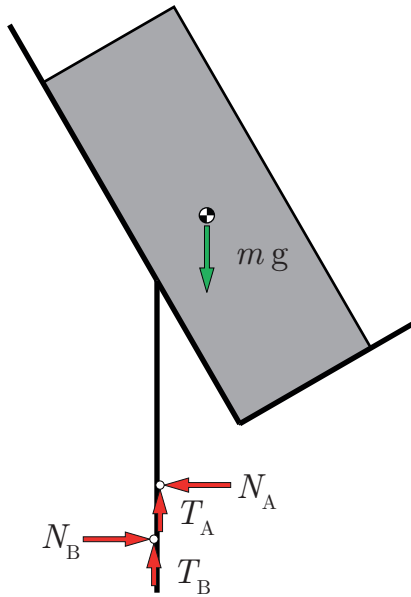
Si accidentalment el motor deixa d'estar alimentat mentre baixa la càrrega a la velocitat del règim estacionari, el fre ha de garantir que la càrrega m no baixi més de $h_e = 50$ mm. Si es suposa que el fre comença a actuar, fent un parell constant, just quan desapareix l'alimentació, determineu:

- d) L'energia dissipada pel fre, E_{fre} , en aquesta frenada d'emergència.
- e) El parell que ha de fer el fre, T_{fre} .
- f) L'acceleració de l'eix del tambor, α_{t_e} , durant la frenada d'emergència i la durada, t_e , d'aquesta frenada.



Solució Exercici 1

- a) La hipòtesi més adient per realitzar l'anàlisi del sistema és suposar que existeix joc entre la columna vertical i la base fixa. L'existència de joc permet canviar fàcilment l'alçada del conjunt plataforma-columna vertical.



Es considera que l'únic element amb massa és l'objecte. El seu pes tendeix a fer girar el conjunt en sentit horari. Els punts de contacte entre la columna vertical i la base fixa són l'inferior esquerre i el superior dret. El diagrama de cos lliure és el de la figura.

- b) L'aplicació del teorema de la quantitat de moviment i del teorema del moment cinètic al punt B per a tot el conjunt permet deduir:

$$N_A - N_B = 0$$

$$T_A + T_B - m g = 0$$

$$N_A h - m g \left(\frac{a}{\cos \varphi} - l \sin \varphi \right) = 0$$

En el cas límit $T_A = \mu N_A$ i $T_B = \mu N_B$. Per tant:

$$\mu_{\min} = \frac{h}{2 \left(\frac{a}{\cos \varphi} - l \sin \varphi \right)} = 0,3055.$$

Solució Exercici 2

- a) Les equacions d'enllaç es troben, per exemple, imposant la condició de tancament de l'anell $O_1 Q R O_2 O_1$ i la matriu jacobiana s'obté derivant-les respecte a les coordenades generalitzades.

$$\Phi(q) = 0 \rightarrow \begin{cases} l_1 \sin(\varphi_1 + \alpha) + l_4 \cos \varphi_3 - l_2 \sin \varphi_2 - d = 0 \\ -l_1 \cos(\varphi_1 + \alpha) + l_4 \sin \varphi_3 + l_2 \cos \varphi_2 - h = 0 \end{cases}$$

$$\Phi_q = \begin{pmatrix} l_1 \cos(\varphi_1 + \alpha) & -l_2 \cos \varphi_2 & -l_4 \sin \varphi_3 \\ l_1 \sin(\varphi_1 + \alpha) & -l_2 \sin \varphi_2 & l_4 \cos \varphi_3 \end{pmatrix}$$



b) Si es pren com a origen de la coordenada y el punt O_1 , es pot escriure:

$$y(G) = -l_1 \cos(\varphi_1 + \alpha) + 2l_4 \sin \varphi_3 - \frac{l_3}{2} \cos \varphi_2 + l_6 \sin \varphi_2 \quad \text{o bé}$$

$$y(G) = h - l_2 \cos \varphi_2 + l_4 \sin \varphi_3 - \frac{l_3}{2} \cos \varphi_2 + l_6 \sin \varphi_2$$

La velocitat $\dot{y}(G)$ s'obté derivant l'expressió $y(G)$:

$$\dot{y}(G) = l_1 \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 + \alpha) + 2l_4 \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 + \left(\frac{l_3}{2} \sin \varphi_2 + l_6 \cos \varphi_2 \right) \dot{\varphi}_2 \quad \text{o bé}$$

$$\dot{y}(G) = l_4 \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 + \left(\left(l_2 + \frac{l_3}{2} \right) \sin \varphi_2 + l_6 \cos \varphi_2 \right) \dot{\varphi}_2$$

c) Les velocitats angulars $\dot{\varphi}_2$ i $\dot{\varphi}_3$ en funció de la velocitat angular $\dot{\varphi}_1$ es poden obtenir operant amb les equacions cinemàtiques d'enllaç:

$$\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_1 \frac{l_1}{l_2} \frac{\cos(\varphi_1 + \alpha - \varphi_3)}{\cos(\varphi_2 - \varphi_3)} \quad \dot{\varphi}_3 = -\dot{\varphi}_1 \frac{l_1}{l_4} \frac{\sin(\varphi_1 + \alpha - \varphi_2)}{\cos(\varphi_2 - \varphi_3)}.$$

Alternativament, també es poden obtenir a partir de l'expressió de l'anàlisi de velocitats:

$$\dot{\mathbf{q}}^d = -(\mathbf{\Phi}_q^d)^{-1} (\mathbf{\Phi}_q^i \dot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{\Phi}_t)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \cos \varphi_2 & -l_4 \sin \varphi_3 \\ -l_2 \sin \varphi_2 & l_4 \cos \varphi_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} l_1 \cos(\varphi_1 + \alpha) \\ l_1 \sin(\varphi_1 + \alpha) \end{Bmatrix} \dot{\varphi}_1$$

$$\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_1 \frac{l_1}{l_2} \frac{\cos(\varphi_1 + \alpha - \varphi_3)}{\cos(\varphi_2 - \varphi_3)} \quad \dot{\varphi}_3 = -\dot{\varphi}_1 \frac{l_1}{l_4} \frac{\sin(\varphi_1 + \alpha - \varphi_2)}{\cos(\varphi_2 - \varphi_3)}.$$

d) Per determinar la força F_{ch} que realitza el cilindre hidràulic es proposa emprar el mètode de les Potències Virtuals.

Es pren com sistema el mecanisme i es realitza un moviment virtual compatible amb els enllaços per tal que no apareguin les forces d'enllaç en l'expressió de les potències virtuals.

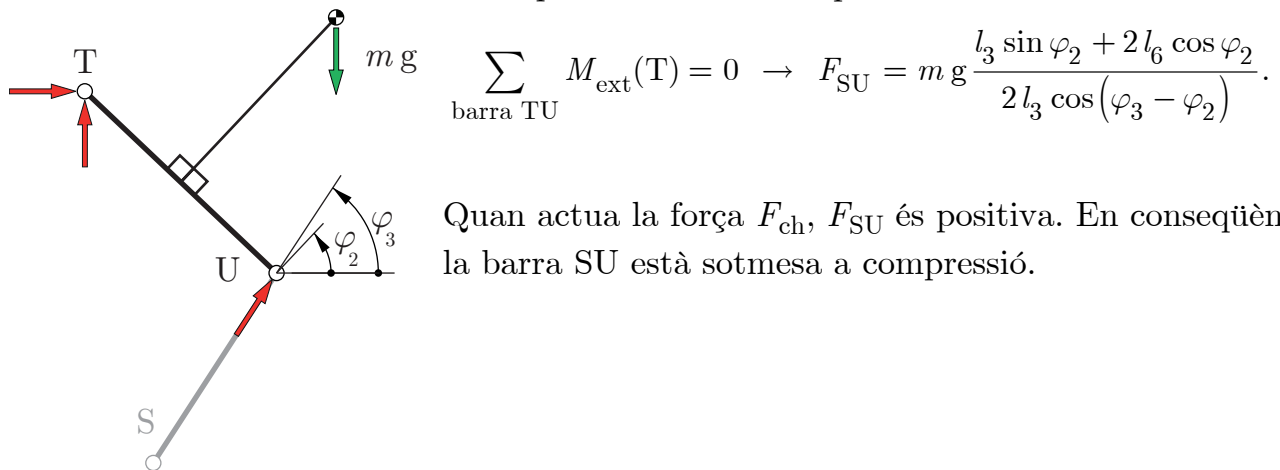
$$\sum_{\text{sistema}} P^* = 0 \rightarrow F_{ch} \cdot \mathbf{v}^*(P) + m \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^*(G) = 0 \rightarrow F_{ch} l_5 \dot{\varphi}_1^* \cos \varphi_1 - m g \dot{y}^* = 0$$

La relació entre les velocitats virtuals $\dot{\varphi}_1^*$ i $\dot{y}^*$ coincideix amb la relació entre les velocitats reals, ja que es realitza un moviment virtual compatible amb els enllaços. Per tant, amb les relacions trobades als apartats b) i c), s'obté l'expressió de la força del cilindre hidràulic F_{ch} .



$$F_{ch} = m g \frac{l_1}{l_5 \cos \varphi_1} \left(\sin(\varphi_1 + \alpha) - 2 \frac{\sin(\varphi_1 + \alpha - \varphi_2) \cos \varphi_3}{\cos(\varphi_2 - \varphi_3)} + \frac{l_3 \sin \varphi_2 + 2 l_6 \cos \varphi_2}{2 l_2} \frac{\cos(\varphi_1 + \alpha - \varphi_3)}{\cos(\varphi_2 - \varphi_3)} \right).$$

- e) Per determinar la força F_{SU} a la qual està sotmesa la barra SU quan actua la força F_{ch} s'analitza la barra TU. El diagrama de sòlid lliure és el mostrat a la figura i aplicant el teorema del moment cinètic al punt T es dedueix que:



Solució Exercici 3

- a) La inèrcia reduïda I_{tot} de tot el sistema es determina a partir del càlcul de l'energia cinètica.

$$E_c = \frac{1}{2} I_{\text{mot}} \omega_m^2 + \frac{1}{2} I_{\text{red}} \omega_m^2 + \frac{1}{2} I_{\text{tambor}} \omega_t^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} (I_{\text{mot}} + I_{\text{red}}) \frac{\omega_t^2}{\tau^2} + \frac{1}{2} I_{\text{tambor}} \omega_t^2 + \frac{1}{2} m r_{\text{tambor}}^2 \omega_t^2$$

$$I = \frac{I_{\text{mot}} + I_{\text{red}}}{\tau^2} + I_{\text{tambor}} + m r_{\text{tambor}}^2 = 2393 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

- b) L'aplicació del principi de conservació de l'energia a la part mecànica del sistema condueix a:

$$P_{\text{subministrada}} = P_{\text{acumulada}} + P_{\text{cedida}} = P_{\text{acumulada}} + P_{\text{útil}} + P_{\text{dissipada}}$$

$$P_m = \dot{E}_p + P_{rp}$$

En règim estacionari no hi ha potència acumulada.



$$P_m = m g \omega_m \tau r_{\text{tambor}} + T_{\text{rp}} \omega_m \tau = 12,37 \text{ kW} \rightarrow T_m = \frac{P_m}{\omega_m} = 81,46 \text{ Nm}$$

$$P_{\text{elec}} = \frac{P_m}{\eta_{\text{em}}} = 13,74 \text{ kW}.$$

- c) A l'igual que a l'apartat anterior, l'aplicació del principi de conservació de l'energia a la part mecànica del sistema condueix a:

$$P_{\text{subministrada}} = P_{\text{acumulada}} + P_{\text{cedida}} = P_{\text{acumulada}} + P_{\text{útil}} + P_{\text{dissipada}}$$

$$P_m = \dot{E}_c + \dot{E}_p + P_{\text{rp}} \rightarrow T_{\text{ma}} \omega_m = I_{\text{tot}} \omega_t \alpha_t + m g \omega_t r_{\text{tambor}} + T_{\text{rp}} \omega_t$$

$$\alpha_t = \frac{1}{I_{\text{tot}}} \left(\frac{T_{\text{ma}}}{\tau} - T_{\text{rp}} - m g r_{\text{tambor}} \right) = 2,923 \text{ rad/s}^2$$

L'arrencada es realitza amb un moviment uniformement accelerat; per tant, el temps d'arrencada t_a i l'alçada h_a recorreguda per la càrrega es determinen com:

$$t_a = \frac{\omega_t}{\alpha_t} = 1,624 \text{ s} \quad h_a = \frac{1}{2} \alpha_t r_{\text{tambor}} t_a^2 = 0,5778 \text{ m}.$$

- d) L'energia dissipada pel fre es pot determinar a partir de l'aplicació del principi de conservació de l'energia a la part mecànica del sistema. En aquesta situació, condueix a:

$$E_{\text{subministrada}} = E_{\text{acumulada}} + E_{\text{cedida}}$$

$$0 = \Delta E_c + \Delta E_p + E_{\text{rp}} + E_{\text{fre}} = -\frac{1}{2} I_{\text{tot}} \omega_t^2 - m g h_e + T_{\text{rp}} \varphi_{te} + E_{\text{fre}}$$

$$E_{\text{fre}} = \frac{1}{2} I_{\text{tot}} \omega_t^2 + m g h_e - T_{\text{rp}} \frac{h_e}{r_{\text{tambor}}} = 27,54 \text{ kJ}.$$

- e) A partir de l'energia dissipada pel fre es pot determinar el parell que ha de fer el fre en la frenada d'emergència com:

$$T_{\text{fre}} = \frac{E_{\text{fre}}}{\varphi_{te}} = \frac{E_{\text{fre}} r_{\text{tambor}}}{h_e} = 82,63 \text{ kNm}.$$

- f) L'aturada d'emergència es realitzarà amb un moviment uniformement desaccelerat. Per tant:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \omega_{t \text{ nom}} + \alpha_{te} t_e \\ \varphi_{te} &= \omega_{t \text{ nom}} t_e + \frac{1}{2} \alpha_{te} t_e^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \alpha_{te} &= -\frac{\omega_{t \text{ nom}}^2}{2 \varphi_{te}} = -\frac{\omega_{t \text{ nom}}^2 r_{\text{tambor}}}{2 h_e} = -33,77 \text{ rad/s}^2 \\ t_e &= \frac{2 \varphi_{te}}{\omega_{t \text{ nom}}} = \frac{2 h_e}{\omega_{t \text{ nom}} r_{\text{tambor}}} = 0,1405 \text{ s} \end{aligned} \right.$$



El parell que ha de fer el fre en la frenada d'emergència també es pot determinar aplicant el principi de conservació de l'energia a la part mecànica del sistema, un cop es coneix l'acceleració de frenada α_{te} :

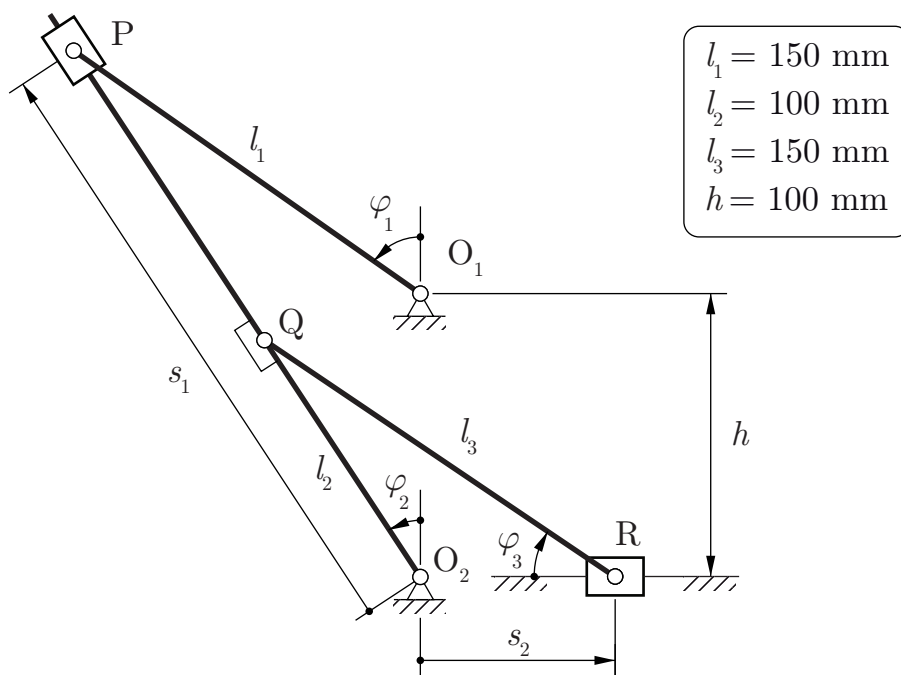
$$P_{subministrada} = P_{acumulada} + P_{cedida}$$

$$0 = \dot{E}_c + \dot{E}_p + P_{rp} + P_{fre} = I_{tot} \omega_t \alpha_{te} - m g \omega_t r_{tambor} + T_{rp} \omega_t + T_{fre} \omega_t$$

$$T_{fre} = -I_{tot} \alpha_{te} + m g r_{tambor} - T_{rp} = 82,63 \text{ kNm}.$$



- Contingut del sobre: enunciat, 3 fulls quadriculats i 2 fulls en blanc. **No es repartirà més material.**
- Per realitzar els dos exercicis es disposa d'una hora i quart.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'un full A4 manuscrit original.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i els fulls reutilitzables en el sobre.

Exercici 1 [5,75 punts]

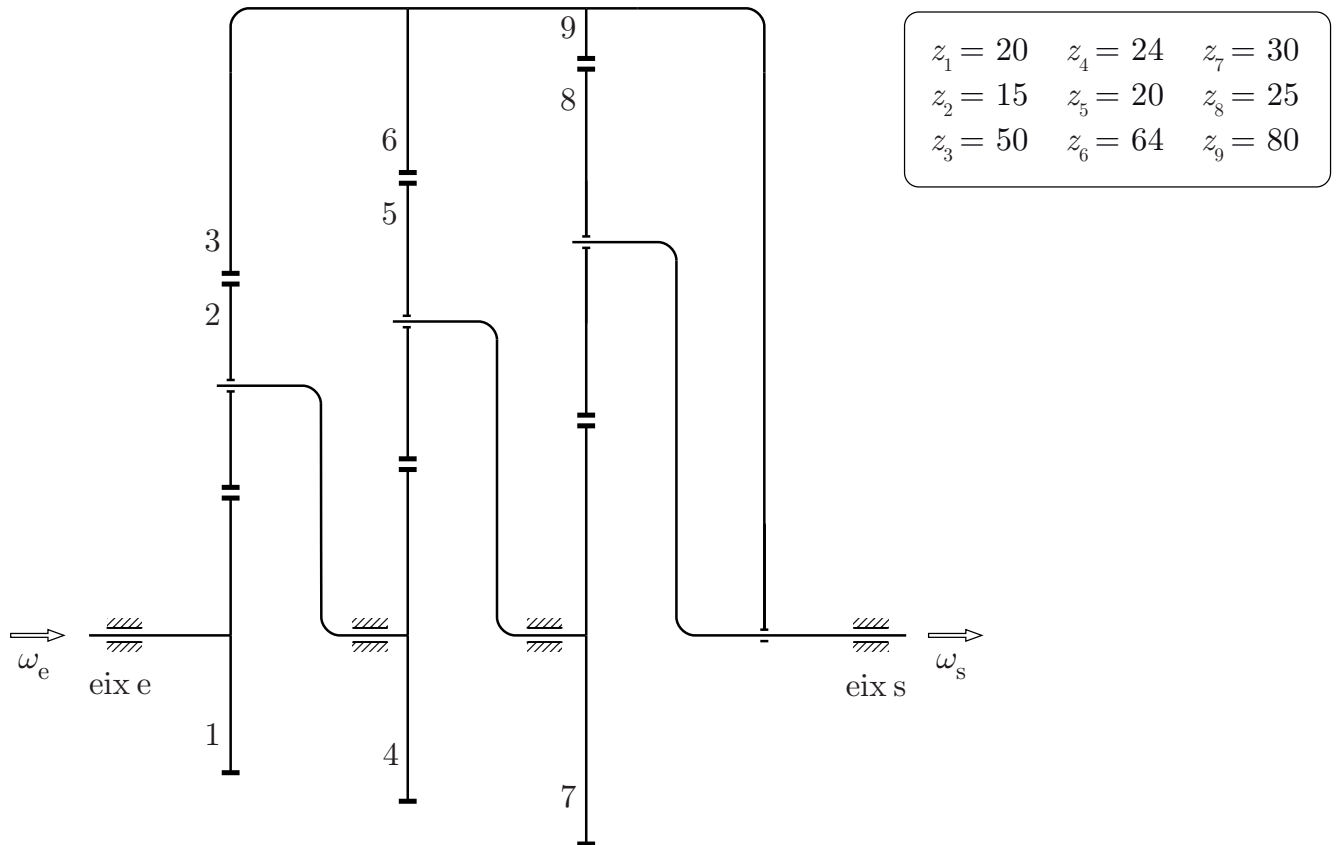
L'esquema de la figura correspon al del mecanisme d'una bomba en el qual variant el paràmetre h es varia la cursa del pistó R.

La bomba és accionada per un motor i un tren d'engranatges, no representats, que accionen la manovella O_1P .

Per realitzar l'anàlisi cinemàtica del mecanisme, s'empra el vector de coordenades generalitzades $\mathbf{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, s_1, s_2\}^T$. Determineu:

- El nombre de graus de llibertat i la possible existència de redundàncies. Justifiqueu adequadament les vostres respostes.
- Les equacions d'enllaç geomètriques entre les coordenades generalitzades i la seva matriu jacobiana $\Phi_{\mathbf{q}}$.
- El centre instantani de rotació I_P de la corredora P respecte al terra.
- Els valors màxim, $s_{1\max}$, i mínim, $s_{1\min}$, de la coordenada s_1 .
- La relació de velocitats $\dot{\varphi}_2 / \dot{\varphi}_3$ en les configuracions de punt mort de la coordenada s_2 .

Exercici 2 [4,25 punts]



En el tren d'engranatges de la figura totes les rodes dentades són del mateix mòdul m . Per a la seva anàlisi cinemàtica s'utilitza el vector de velocitats generalitzades $\mathbf{u} = \{\omega_e, \omega_3, \omega_4, \omega_7, \omega_s\}^T$. Determineu:

- El nombre de graus de llibertat del tren d'engranatges. Justifiqueu la vostra resposta.
- Les equacions d'enllaç cinemàtiques entre les velocitats generalitzades.
- Les relacions de transmissió que es poden obtenir $\tau = \omega_s/\omega_e$ si $\omega_3 = 0$, si $\omega_4 = 0$ o si $\omega_7 = 0$.



Solució – Exercici 1

- a) Si s'atura la rotació de la barra O_1P el punt P queda aturat i es forma un triangle indeformable O_1PO_2 . En conseqüència, el punt Q també queda aturat i la barra QR no es mou. Amb això, la corredora R tampoc no es mou. Per tant, el mecanisme té 1 grau de llibertat ja que aturant una única velocitat queda en repòs.

També es pot considerar que el mecanisme està format per un pistó biela manovella -corredora R , barra QR i barra O_2Q – més un grup d'Assur –barra O_1P i corredora P .

Si s'aplica el criteri de superposició de restriccions del moviment (criteri de Grübler–Kutzbach) dona un número igual a 1.

$$5(\text{sòlids mòbils}) \times 3 - 5(\text{articulacions}) \times 2 - 2(\text{p. prismàtics}) \times 2 = 1.$$

El mecanisme no presenta redundàncies totals ja que coincideixen el nombre de graus de llibertat i el número de Grübler–Kutzbach.

- b) Com que s'empren 5 coordenades generalitzades i només n'hi ha una d'independent, cal determinar 4 equacions d'enllaç geomètriques que es poden obtenir, per exemple, imposant el tancament dels anells $O_1PO_2O_1$ i O_2QRO_2 .

$$\begin{cases} -l_1 \sin \varphi_1 + s_1 \sin \varphi_2 = 0 \\ l_1 \cos \varphi_1 - s_1 \cos \varphi_2 + h = 0 \\ -l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 - s_2 = 0 \\ l_2 \cos \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \Phi(\mathbf{q}) = 0$$

La matriu jacobiana s'obté derivant les equacions d'enllaç geomètriques respecte a les coordenades generalitzades.

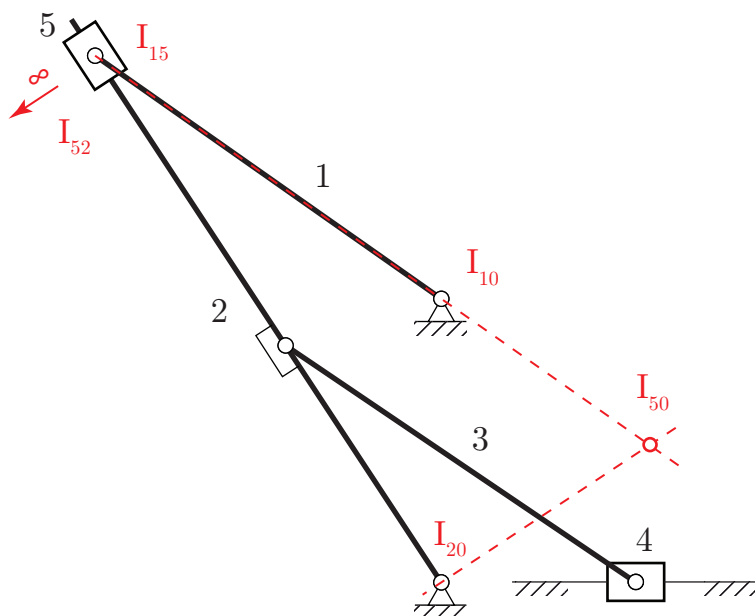
$$\Phi_q(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -l_1 \cos \varphi_1 & s_1 \cos \varphi_2 & 0 & \sin \varphi_2 & 0 \\ -l_1 \sin \varphi_1 & s_1 \sin \varphi_2 & 0 & -\cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & -l_2 \cos \varphi_2 & -l_3 \sin \varphi_3 & 0 & -1 \\ 0 & -l_2 \sin \varphi_2 & -l_3 \cos \varphi_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- c) El centre instantani de rotació de la corredora P respecte al terra – I_P – es pot determinar sabent que el punt P té velocitat perpendicular a la recta O_1P . Així doncs, el centre instantani de rotació I_P es troba en la prolongació de la recta O_1P .

El teorema dels tres centres aplicat a la terna de sòlids terra –0–, corredora P –5– i barra O_2P –2– indica que el centre instantani de rotació I_{52} es troba a l'infinit sobre la recta perpendicular a O_2P que passa per O_2 .



Així doncs, el punt $I_P \equiv I_{50}$ es troba a la intersecció de la prolongació de la recta O_1P amb la recta perpendicular a O_2P que passa per O_2 , tal com mostra la figura.



d) El valor màxim $s_{1\max}$ es produeix quan $\varphi_1 = \varphi_2 = 0^\circ$ i val $s_{1\max} = l_1 + h = 250$ mm.

El valor mínim $s_{1\min}$ es produeix quan $\varphi_1 = \varphi_2 = 180^\circ$ i val $s_{1\min} = l_1 - h = 50$ mm.

e) El valor màxim de la coordenada s_2 es produeix quan els punts O_2 , Q i R es troben alineats i en aquest ordre i el valor mínim de la coordenada s_2 es produeix quan el punt O_2 es troba entre els punts Q i R.

En la configuració $s_{2\max}$ es té: $\frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_3} = \frac{l_3}{l_2} = 1,5$.

En la configuració $s_{2\min}$ es té: $\frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_3} = -\frac{l_3}{l_2} = -1,5$.



Solució – Exercici 2

- a) El tren d'engranatges té 2 graus de llibertat. Cal aturar dues velocitats angulars per anul·lar el moviment: si s'atura la rotació de la roda 1, $\omega_1 = 0$, la resta de rodes poden continuar girant. Si s'atura la rotació de la roda 3, $\omega_3 = 0$, s'aturen totes les rotacions.
- b) El tren d'engranatges és un tren epicicloidal compost de 3 trens epicicloïdals simples. Les rodes del primer tren, que giren entorn de l'eix fix, són les rodes 1 i 3, les del segon tren són les rodes 4 i 6 i les del tercer tren són les rodes 7 i 9.

La roda 4 fa de braç del primer tren entorn del qual gira el satèl·lit 2 i la roda 7 fa de braç del segon tren entorn del qual gira el satèl·lit 5.

Si per al primer tren epicicloidal es pren la roda 1 com a entrada i la roda 3 com a sortida es pot escriure:

$$\tau_1 = \frac{\omega_{3/b1}}{\omega_{1/b1}} = \frac{\omega_3 - \omega_4}{\omega_1 - \omega_4} \rightarrow \tau_1 \omega_1 + (1 - \tau_1) \omega_4 - \omega_3 = 0$$
$$\text{amb } \tau_1 = (\pm) \frac{\prod z_{\text{conductores}}}{\prod z_{\text{conduïdes}}} = -\frac{z_1}{z_3} = -\frac{2}{5} = -0,4.$$

Si per al segon tren epicicloidal es pren la roda 4 com a entrada i la roda 6 com a sortida es pot escriure:

$$\tau_2 = \frac{\omega_{6/b2}}{\omega_{4/b2}} = \frac{\omega_6 - \omega_7}{\omega_4 - \omega_7} \rightarrow \tau_2 \omega_4 + (1 - \tau_2) \omega_7 - \omega_6 = 0$$
$$\text{amb } \tau_2 = (\pm) \frac{\prod z_{\text{conductores}}}{\prod z_{\text{conduïdes}}} = -\frac{z_4}{z_6} = -\frac{3}{8} = -0,375.$$

Si per al tercer tren epicicloidal es pren la roda 7 com a entrada i la roda 9 com a sortida es pot escriure:

$$\tau_3 = \frac{\omega_{9/b3}}{\omega_{7/b3}} = \frac{\omega_9 - \omega_{b3}}{\omega_7 - \omega_{b3}} \rightarrow \tau_3 \omega_7 + (1 - \tau_3) \omega_{b3} - \omega_9 = 0$$
$$\text{amb } \tau_3 = (\pm) \frac{\prod z_{\text{conductores}}}{\prod z_{\text{conduïdes}}} = -\frac{z_7}{z_9} = -\frac{3}{8} = -0,375.$$

En la unió dels 3 trens $\omega_3 = \omega_6 = \omega_9$. A més, s'observa que $\omega_1 = \omega_e$ i que $\omega_{b3} = \omega_s$. Per tant, les equacions cinemàtiques d'enllaç es reescriuen com:

$$\begin{aligned}\tau_1 \omega_e + (1 - \tau_1) \omega_4 - \omega_3 &= 0 \\ \tau_2 \omega_4 + (1 - \tau_2) \omega_7 - \omega_3 &= 0 \\ \tau_3 \omega_7 + (1 - \tau_3) \omega_s - \omega_3 &= 0\end{aligned}$$

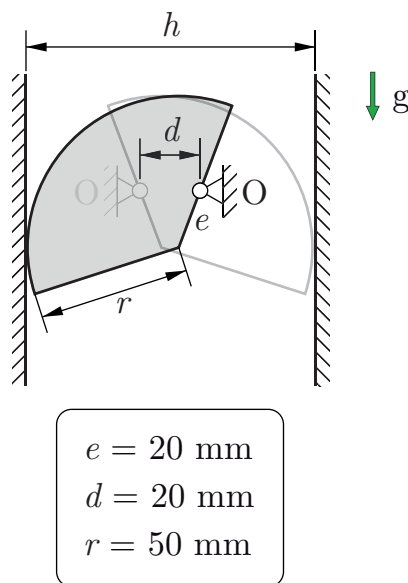


- c) Per tal d'obtenir una relació de transmissió $\tau = \omega_s/\omega_e$ cal que el tren d'engranatges tingui un grau de llibertat. En els casos proposats:

$$\tau = \left. \frac{\omega_s}{\omega_e} \right|_{\omega_3=0} = 21,25 \cdot 10^{-3}, \quad \tau = \left. \frac{\omega_s}{\omega_e} \right|_{\omega_4=0} = -0,3702 \quad \text{i} \quad \tau = \left. \frac{\omega_s}{\omega_e} \right|_{\omega_7=0} = -61,46 \cdot 10^{-3}.$$



- Contingut del sobre: enunciat, 4 fulls quadriculats i 3 fulls en blanc. **No es repartirà més material.**
- Per realitzar l'examen es disposa de **tres hores**.
- Pel que fa al material escrit només es pot disposar d'un full **A4 manuscrit original**.
- A l'hora d'entregar introduïu els fulls quadriculats i els fulls reutilitzables en el sobre.

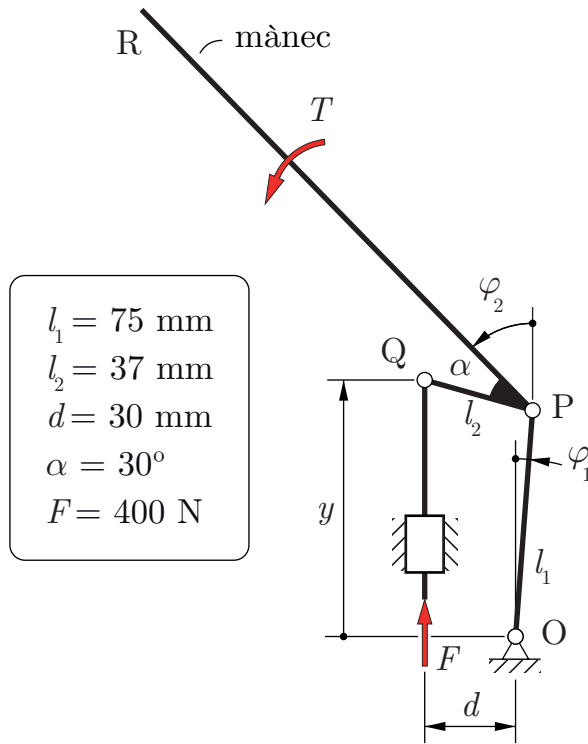
Exercici 1 [2,5 punts]

Un *friend*, com el mostrat a la fotografia, és un dispositiu mecànic de seguretat per a l'escalada clàssica o l'alpinisme que funciona per fregament. Es basa en un sistema de llesques que, quan es col·loquen en una fissura, es falquen a les parets de la roca.

Per al seu estudi simplificat s'empra el model mostrat a l'esquema. Aquest model considera que les llesques són de perfil circular, de radi r , que giren entorn dels punts O i que les parets són verticals.

- Dibuixeu el diagrama de cos lliure de la lleveta de l'esquerra del *friend*.
- Determineu el coeficient de freg mínim, $\mu_{\min}$, entre la paret de la fissura i el *friend*, en funció de l'amplada h , per tal de garantir la seguretat de la persona que l'usa.

Exercici 2 [4,5 punts]



La figura mostra la fotografia i l'esquema de símbols d'un gat hidràulic emprat per elevar grans pesos.

Per a la seva anàlisi cinemàtica i dinàmica, s'utilitza el vector de coordenades generalitzades $\mathbf{q} = \{\varphi_1, \varphi_2, y\}^T$.

Determineu:

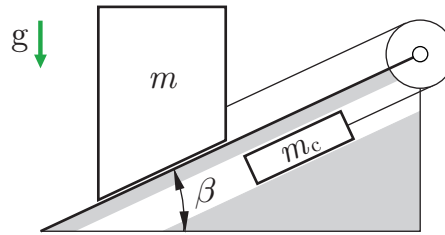
- Les equacions d'enllaç geomètriques entre les coordenades generalitzades i la seva matriu jacobiana $\Phi_{\mathbf{q}}$.
- Les expressions de les velocitats $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{y}$ en funció de $\dot{\varphi}_2$ i de la configuració.
- El centre instantani de rotació, I, de la biela PQ respecte al terra.

Quan s'utilitza el gat, per elevar una càrrega, la corredora vertical rep la força F indicada, suposada constant. Determineu:

- L'expressió del parell T sobre el mànec que fa la persona que utilitza el gat. Determineu-ne el valor quan $\varphi_1 = 5,36^\circ$ i $\varphi_2 = 60^\circ$. Especifiqueu i justifiqueu clarament les hipòtesis que realitzeu. **Avís:** aquest apartat tindrà una valoració nul·la si no s'especifiquen i justifiquen les hipòtesis.
- L'expressió de la força F_{OP} a la qual està sotmesa la barra OP en funció de F . Especifiqueu si la barra està sotmesa a tracció o a compressió.



Exercici 3 [3 punts]



Els ascensors inclinats exteriors són mitjans de transport, públics o privats, que permeten superar grans desnivells en zones de difícil orografia. Els situats en zones urbanes estan especialment pensats per a persones amb mobilitat reduïda.

Aquests ascensors són accionats amb motors elèctrics i una politja tractora sobre la qual s'enrotlla el cable. Els contrapesos d'aquests ascensors tenen el mateix moviment que la cabina de l'ascensor però en sentit contrari.

La fotografia mostra un dels ascensors inclinats existents a Barcelona i l'esquema en mostra una representació simplificada.

L'ascensor inclinat analitzat té les següents característiques:

- Longitud del trajecte: $l_{\text{traj}} = 50 \text{ m}$
- Inclinació $\beta = 25^\circ$
- Acceleració durant l'arrencada i la frenada: $|a| = 0,25 \text{ m/s}^2$
- Temps d'arrencada i de frenada: $t = 4 \text{ s}$
- Radi de la politja tractora: $r = 0,2 \text{ m}$
- Massa de la cabina: $m = 800 \text{ kg}$
- Massa del contrapès: $m_c = 1175 \text{ kg}$
- Inèrcia reduïda, a la rotació de la politja, del conjunt motor + politja: $I_{\text{mp}} = 2,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- Massa mitjana dels passatgers: $m_p = 75 \text{ kg}$
- Nombre màxim de passatgers: $n_{\text{max}} = 10$
- Resistències passives de la instal·lació reduïdes a la rotació de la politja: $T_{\text{rp}} = 600 \text{ N}\cdot\text{m}$
- Rendiment electromecànic: $\eta = 0,7$



Es considera que:

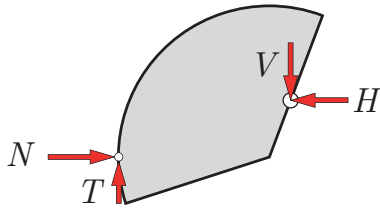
- El cable és de massa negligible i no llisca sobre la politja tractora.
- Les resistències passives i el rendiment no varien amb l'estat de càrrega.
- L'arrencada i la frenada es fan amb la mateixa acceleració a i duren el mateix temps t . La resta del viatge es realitza a velocitat constant.

Determineu:

- a) La durada d'un viatge de pujada, t_{viatge} , en s.
- b) La inèrcia reduïda de la instal·lació formada per tots els elements que constitueixen l'ascensor (motor+politja+cabina+contrapes), I_{ascensor} , a la rotació de la politja tractora.
- c) El parell motor, T_m , necessari a l'eix de la politja tractora en un viatge de **pujada**, si l'ascensor transporta el nombre màxim de passatgers. Pareu atenció a les tres fases del viatge (arrencada, velocitat constant i frenada) i doneu-ne el valor en cada fase.
- d) L'energia elèctrica consumida en un viatge de pujada, E_{elec} , quan l'ascensor transporta el nombre màxim de passatgers.



Solució Exercici 1



- a) El diagrama de cos lliure de la lleva de l'esquerra del *friend* és el que es mostra a la figura.

- b) L'aplicació del teorema del moment cinètic a la lleva en el punt O permet escriure:

$$\sum_{\text{lleva}} M_{\text{ext}}(O) = 0 \rightarrow Ne \cos \varphi - T(r + e \sin \varphi) = 0, \text{ essent } \varphi \text{ l'angle que forma la}$$

recta que uneix el centre de la lleva i el punt O respecte la vertical.

En el límit $T = \mu \cdot N$ i per tant:

$$\mu = \frac{e \cos \varphi}{r + e \sin \varphi}. \text{ Si es té en compte que } e \sin \varphi = \frac{h + d - 2r}{2} \text{ el coeficient de freg } \mu \text{ es}$$

$$\text{reescriu com: } \mu = \frac{1}{h + d} \sqrt{4e^2 - (h + d - 2r)^2} = \frac{1}{h + 20} \sqrt{1600 - (h - 80)^2}, h \text{ en mm.}$$

Solució Exercici 2

- a) El mecanisme té un grau de llibertat. Per tant, calen 2 equacions geomètriques d'enllaç que es poden trobar, per exemple, imposant la condició de tancament de l'anell OPQO.

$$\Phi(q) = 0 \rightarrow \begin{cases} l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) + d = 0 \\ l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) - y = 0 \end{cases}$$

La matriu jacobiana és en aquest cas:

$$\Phi_q = \begin{pmatrix} l_1 \cos \varphi_1 & -l_2 \cos(\varphi_2 + \alpha) & 0 \\ -l_1 \sin \varphi_1 & -l_2 \sin(\varphi_2 + \alpha) & -1 \end{pmatrix}$$

- b) Les expressions de les velocitats $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{y}$ en funció de $\dot{\varphi}_2$ es poden obtenir operant amb les equacions cinemàtiques d'enllaç:

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 \frac{l_2 \cos(\varphi_2 + \alpha)}{l_1 \cos \varphi_1} \quad \text{i} \quad \dot{y} = -\dot{\varphi}_2 l_2 \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \alpha)}{\cos \varphi_1}.$$

Alternativament, es poden obtenir a partir de l'expressió de l'anàlisi de velocitats:

$$\dot{q}^d = -(\Phi_q^d)^{-1} (\Phi_q^i \dot{q}^i + \Phi_t).$$



- c) El centre instantani de rotació I de la biela PQ es pot determinar a partir de les velocitats dels punts P i Q.

La velocitat de P és perpendicular a la recta OP. Per tant, el centre instantani I es troba sobre aquesta recta.

La velocitat de Q és vertical. Per tant, el centre instantani I es troba sobre la recta horitzontal que passa per Q.

Així doncs, el centre instantani de rotació I es troba en la intersecció de la recta OP i la recta horitzontal que passa per Q.

- d) Se suposa que les barres són de massa i inèrcia negligibles i que les totes les resistències passives en els enllaços també ho són. D'aquesta manera, es pot determinar el parell que ha de fer la persona, T , a causa únicament de la força F que el gat rep a causa de la càrrega que ha d'aixecar.

Per determinar T , es proposa emprar el mètode de les Potències Virtuals prenent com sistema tot el mecanisme i realitzar un moviment virtual compatible amb els enllaços per tal que no apareguin les forces d'enllaç en l'expressió del mètode de les potències virtuals.

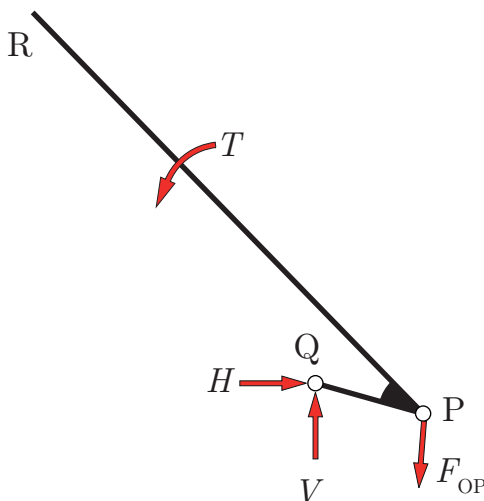
$$\sum_{\text{sist.}} P^* = 0 \quad \rightarrow \quad T \dot{\varphi}_2^* + F \dot{y}^* = 0.$$

La relació entre $\dot{\varphi}_2^*$ i $\dot{y}^*$ coincideix amb la relació obtinguda a l'apartat b) ja que, en aquest cas, la cinemàtica virtual coincideix amb la cinemàtica real:

$$\text{Així doncs: } T = F l_2 \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \alpha)}{\cos(\varphi_1)}.$$

Per a la configuració demanada $T = 14,8 \text{ N}\cdot\text{m}$.

- e) Amb la consideració que les barres són d'inèrcia negligible es pot assegurar que la força F_{OP} a la qual està sotmesa la barra OP té la direcció de la barra.



A partir del diagrama de sòlid lliure mostrat a la figura, l'aplicació del teorema de la quantitat de moviment al mànec, en direcció vertical, permet escriure:

$$V - F_{OP} \cos \varphi_1 = 0 \quad \rightarrow \quad F_{OP} = \frac{F}{\cos \varphi_1}.$$

Dins del marge de funcionament aquesta força sempre és positiva. Per tant, la barra OP està sotmesa a tracció.



Solució Exercici 3

- a) La durada d'un viatge de pujada (o de baixada) es pot determinar com:

$$t_{\text{viatge}} = 2t + \frac{l_{\text{traj}} - 2l}{v} = 54 \text{ s},$$

essent l la distància que es recorre amb acceleració/desacceleració constant.

- b) La inèrcia reduïda, a la rotació de la politja tractora, de la instal·lació formada per tots els elements que constitueixen l'ascensor es determina a partir del càlcul de la seva l'energia cinètica.

$$E_c = \frac{1}{2}(m + m_c)(\omega r)^2 + \frac{1}{2}I_{\text{mp}}\omega^2, \text{ essent } \omega \text{ la velocitat angular de la politja tractora.}$$

$$\text{Per tant: } I_{\text{ascensor}} = (m + m_c)r^2 + I_{\text{mp}} = 81,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

- c) El parell motor T_m , necessari a l'eix de la politja tractora en un viatge de **pujada**, si l'ascensor transporta el nombre màxim de passatgers, es pot determinar a partir de l'aplicació del principi de conservació de l'energia al conjunt format per l'ascensor i els passatgers.

$$P_{\text{sub}} = P_{\text{cedida}} + P_{\text{acumulada}} \rightarrow P_{\text{mot}} = P_{\text{rp}} + \dot{E}_c + \dot{E}_p \text{ d'on}$$

$$T_m = T_{\text{rp}} + I_{\text{ascensor}} \frac{a}{r} + n_{\text{max}} m_p r a + (m + n_{\text{max}} m_p - m_c) g r \sin \beta$$

Durant l'arrencada $T_m = 1050 \text{ N} \cdot \text{m}$; en el tram a velocitat constant $T_m = 910,8 \text{ N} \cdot \text{m}$; durant la frenada $T_m = 771,8 \text{ N} \cdot \text{m}$

- d) L'energia elèctrica consumida en un viatge de pujada, E_{elec} , es pot determinar a partir de l'aplicació del principi de conservació de l'energia al conjunt format per l'ascensor i els passatgers i del rendiment del motor.

$$E_{\text{sub}} = E_{\text{cedida}} + E_{\text{acumulada}} \rightarrow E_{\text{elec}} \eta = E_{\text{rp}} + \Delta E_p \text{ d'on}$$

$$E_{\text{elec}} = \frac{1}{\eta} \left(T_{\text{rp}} \frac{l_{\text{traj}}}{r} + (m + n_{\text{max}} m_p - m_c) g l_{\text{traj}} \sin \beta \right) = 325,3 \text{ kJ} = 90,36 \text{ W} \cdot \text{h}.$$

