

# Guia docent

## 220080 - AL - Àlgebra

Última modificació: 22/04/2021

**Unitat responsable:** Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa  
**Unitat que imparteix:** 749 - MAT - Departament de Matemàtiques.

**Titulació:** GRAU EN ENGINYERIA EN TECNOLOGIES INDUSTRIALS (Pla 2010). (Assignatura obligatòria).

**Curs:** 2021      **Crèdits ECTS:** 6.0      **Idiomes:** Català

### PROFESSORAT

---

**Professorat responsable:** Amer Ramon, Rafel

**Altres:** Amer Ramon, Rafael  
Monsó, Enric  
Pfeifle, Julian

### COMPETÈNCIES DE LA TITULACIÓ A LES QUALS CONTRIBUEIX L'ASSIGNATURA

---

#### Específiques:

1. Capacitat per a la resolució dels problemes matemàtics que puguin plantejar-se en l'enginyeria. Aptitud per aplicar els coneixements sobre: àlgebra lineal; geometria; geometria diferencial; càlcul diferencial i integral; equacions diferencials i en derivades parcials; mètodes numèrics; algorítmica numèrica; estadística i optimització.

#### Transversals:

2. APRENTATGE AUTÒNOM - Nivell 1: Dur a terme les tasques encomanades en el temps previst, tot treballant amb les fonts d'informació indicades, d'acord amb les pautes marcades pel professorat.

### METODOLOGIES DOCENTS

---

A les classes presencials sobre els continguts teòrics el professor introduirà els diferents conceptes de l'assignatura i els seus resultats fonamentals, així com exemples que facilitin la seva comprensió. Els estudiants, per la seva banda, plantejaran al professor els dubtes que tinguin durant l'explicació. L'estudiant completarà el seu aprenentatge mitjançant l'estudi personal i la posterior realització dels exercicis corresponents als continguts pràctics.

Precisament, pel que fa als continguts pràctics els estudiants hauran de resoldre una col·lecció de 120 exercicis (15 per capítol), que els ajudaran a entendre els conceptes estudiats i a adquirir l'habilitat d'expressar-se correctament. Per a la seva resolució l'estudiant disposa d'una altra col·lecció d'exercicis ja resolts que ha de fer servir com a llibre de consulta i guia. Els estudiants, després d'intentar fer els exercicis proposats, plantejaran al professor a classe els dubtes que hagin tingut durant la seva realització i el professor els orientarà per tal que els puguin resoldre.

Per la seva banda, les classes de consolidació estan pensades per tal que els estudiants puguin obtenir una visió de conjunt de les diferents parts del temari. Al mateix temps, constitueixen una altra oportunitat per als estudiants de plantejar els darrers dubtes que encara puguin tenir abans de la realització dels controls i els exàmens parcial i final.

Finalment, cada professor té fixades unes hores de consulta al seu despatx que els estudiants poden utilitzar per a resoldre de forma individual tots els dubtes que tinguin referents a la comprensió de conceptes, la resolució d'exercicis o problemes o la realització dels treballs que el professor els hagi proposat.

## OBJECTIUS D'APRENTATGE DE L'ASSIGNATURA

Atenent el caràcter bàsic de l'Àlgebra Lineal dintre del pla d'estudis del Grau d'Enginyeria en Tecnologies Industrials, l'objectiu fonamental de l'assignatura és proporcionar als estudiants els conceptes i eines bàsiques de l'Àlgebra Lineal i de la seva aplicació més immediata, la Geometria, que són necessaris en d'altres disciplines. Aquests coneixements han de servir als estudiants per iniciar-se en el procés de modelització i resolució de problemes i en la consegüent interpretació de les solucions obtingudes sobre diferents situacions que es puguin trobar tant a la resta de la carrera com, posteriorment, en l'exercici de la seva professió.

Així mateix, i amb vistes a l'aplicació dels coneixements adquirits en l'assignatura, es considera de gran importància començar a preparar els estudiants en l'assoliment d'un nivell adequat d'autonomia que els permeti afrontar amb suficients garanties el repte de la formació contínua. En tal sentit, i tenint en compte que el procés d'aprenentatge està íntimament relacionat amb el de la búsqueda i el compartiment de la informació, s'insistirà en què la seva plasmació ha de ser feta de forma clara i rigorosa.

## HORES TOTALS DE DEDICACIÓ DE L'ESTUDIANTAT

| Tipus                      | Hores | Percentatge |
|----------------------------|-------|-------------|
| Hores grup mitjà           | 28,0  | 18.67       |
| Hores grup gran            | 32,0  | 21.33       |
| Hores aprenentatge autònom | 90,0  | 60.00       |

**Dedicació total:** 150 h

## CONTINGUTS

### 1. Càlcul matricial

#### Descripció:

1.1 Matrius i determinants

1.1.1. Operacions amb matrius. Transposició. Matrius simètriques

1.1.2 Determinants. Adjunts

1.1.3 Dependència lineal. Menors. Rang

1.2 Sistemes d'equacions lineals i inversió

1.2.1 Sistemes d'equacions lineals. Eliminació de paràmetres lineals

1.2.2 Equacions matricials bàsiques. Matriu adjunta

1.2.3 Matrius singulars i regulars. Inversa d'una matriu regular. Matrius ortogonals

#### Objectius específics:

Operar amb matrius. Calcular determinants pels diferents mètodes existents. Calcular el rang d'una matriu pels mètodes de Gauss i dels menors.

Discutir i resoldre sistemes d'equacions lineals pels mètodes de Gauss i Cramer. Eliminar paràmetres d'expressions explícites lineals pels mètodes de Gauss i Cramer. Resoldre equacions matricials elementals del producte pels mètodes de Gauss-Jordan i de l'adjunta. Determinar si una matriu quadrada és regular o singular pel mètode de Gauss i a partir del seu determinant. Calcular la inversa d'una matriu regular pels mètodes de Gauss-Jordan i de l'adjunta. Determinar si una matriu és ortogonal o no.

#### Activitats vinculades:

Presentació i cloenda, teoria, pràctiques i consolidació. Primer control, examen parcial i examen final.

**Dedicació:** 37h 30m

Grup gran/Teoria: 8h

Grup mitjà/Pràctiques: 7h

Aprenentatge autònom: 22h 30m



## 2. Espais vectorials

### Descripció:

2.1 L'espai vectorial.

2.1.1 Suma i producte per escalars. Dependència lineal. Rang.

2.1.2 Subespais vectorials. Generadors i bases. Equacions implícites. Dimensió. Orientació.

2.1.3 Components. Canvis de base.

2.2 L'espai vectorial euclidià.

2.2.1 Producte escalar. Norma i angle. Producte vectorial. Sistemes ortogonals i ortonormals.

2.2.2 Bases ortogonals i ortonormals. Suplementari ortogonal. Projectió ortogonal i simètric. Millors aproximacions d'un sistema d'equacions lineals.

2.2.3 Components en bases ortonormals. Canvis ortogonals de base.

### Objectius específics:

Operar amb vectors. Calcular combinacions lineals de vectors. Determinar si uns vectors són linealment dependents o independents. Calcular el rang d'uns vectors. Determinar si un vector és combinació lineal d'uns altres. Calcular una base d'un subespai vectorial a partir d'un sistema de generadors o unes equacions implícites. Calcular equacions implícites mínimals d'un subespai vectorial a partir d'un sistema de generadors o unes equacions implícites. Calcular la dimensió d'un subespai vectorial a partir d'un sistema de generadors o unes equacions implícites. Determinar si uns vectors són sistema de generadors o base de l'espai. Determinar l'orientació d'una base de l'espai. Calcular les components d'un vector en una base de l'espai. Calcular la matriu de canvi de base entre dues bases de l'espai. Relacionar les components d'un vector i les equacions implícites d'un subespai vectorial en diferents bases de l'espai.

Calcular el producte escalar, la norma, l'angle i el producte vectorial de vectors. Determinar si un sistema és ortogonal i ortonormal. Calcular sistemes ortogonals i ortonormals a partir de vectors linealment independents. Calcular el suplementari ortogonal d'un subespai vectorial. Calcular la projectió ortogonal i el simètric d'un vector respecte d'un subespai vectorial. Aplicar el mètode dels mínims quadrats. Determinar si una base de l'espai és ortogonal i ortonormal. Determinar si un canvi de base és ortogonal.

### Activitats vinculades:

Presentació i cloenda, teoria, pràctiques i consolidació. Examen parcial i examen final.

**Dedicació:** 37h 30m

Grup gran/Teoria: 8h

Grup mitjà/Pràctiques: 7h

Aprenentatge autònom: 22h 30m



### 3. Endomorfismes

#### Descripció:

3.1 Endomorfismes.

3.1.1 Endomorfismes. Nucli i imatge. Rang i determinant.

3.1.2 Matriu associada. Canvis de base.

3.1.3 Diagonalització. Potències d'una matriu diagonalitzable.

3.2 Endomorfismes de l'espai vectorial euclidià.

3.2.1 Endomorfismes simètrics. Diagonalització ortogonal.

3.2.2 Projeccions ortogonals. Simetries. Rotacions.

3.2.3 Isometries lineals. Classificació d'isometries lineals.

#### Objectius específics:

Determinar si una aplicació és o no lineal. Calcular la imatge i les antiimatges d'un vector. Calcular el nucli i la imatge. Calcular la matriu associada a partir de la fórmula del canvi de base. Determinar si un endomorfisme o una matriu és diagonalitzable.

Diagonalitzar els endomorfismes i matrius diagonalitzables. Calcular potències d'una matriu diagonalitzable.

Determinar si un endomorfisme és simètric. Diagonalitzar ortogonalment endomorfismes i matrius simètriques. Diagonalitzar i diagonalitzar ortogonalment projeccions ortogonals i simetries. Calcular la matriu reduïda d'una rotació. Calcular la matriu associada a una projecció ortogonal, una simetria o una rotació. Determinar si un endomorfisme és una isometria lineal. Classificar isometries lineals.

#### Activitats vinculades:

Presentació i cloenda, teoria, pràctiques i consolidació. Segon control i examen final.

**Dedicació:** 37h 30m

Grup gran/Teoria: 8h

Grup mitjà/Pràctiques: 7h

Aprenentatge autònom: 22h 30m



## 4. Geometria

### Descripció:

4.1 L'espai afí i l'espai afí euclidià.

4.1.1 Vectors lliures. Suma de punts i vectors. Baricentre. Varietats lineals. Subespai director. Referències i orientació. Equacions implícites. Dimensió. Paral·lelisme i intersecció: posició relativa.

4.1.2 Distància entre punts. Subespai associat. Perpendicularitat. Projectió ortogonal i simètric. Distància entre varietats lineals.

4.1.3 Coordenades i coordenades euclidianes. Canvis de referència i canvis ortogonals de referència.

4.2 Còniques i quàdriques.

4.2.1 Paràbola. El·lipse. Hipèrbola.

4.2.2 Còniques. Còniques amb centre i sense centre. Còniques degenerades.

4.2.3 Quàdriques. Quàdriques amb centre i sense centre. Quàdriques degenerades.

### Objectius específics:

Operar amb punts i vectors. Calcular el baricentre d'uns punts. Calcular equacions implícites d'una varietat lineal a partir d'un punt de pas i el seu subespai director. Determinar un punt de pas i el subespai director d'una varietat lineal a partir de les seves equacions implícites. Estudiar la posició relativa de dues varietats lineals. Calcular varietats lineals paral·leles a d'altres. Calcular la distància entre dos punts. Determinar si dues varietats lineals són perpendiculars. Calcular varietats lineals perpendiculars a d'altres. Calcular la projectió ortogonal i el simètric d'un punt respecte d'una varietat lineal. Calcular la distància entre dues varietats lineals. Determinar si un punt i uns vectors formen una referència de l'espai. Determinar l'orientació d'una referència de l'espai. Determinar si una referència de l'espai és euclidiana. Calcular l'expressió d'un canvi de referència. Relacionar les coordenades d'un punt i les equacions implícites d'una varietat lineal en dues referències. Determinar si un canvi de referència és ortogonal. Descomposar un canvi de referència en una translació d'origen i un canvi d'eixos.

Calcular l'equació i els elements característics d'una paràbola, una el·lipse o una hipèrbola a partir de la seva definició mètrica. Classificar còniques. Determinar la definició mètrica i els elements característics d'una cònica no degenerada a partir de la seva equació. Calcular les dues rectes que formen una cònica degenerada. Classificar quàdriques. Calcular les equacions dels dos plans que formen una quàdrica degenerada.

### Activitats vinculades:

Presentació i cloenda, teoria, pràctiques i consolidació. Examen final.

**Dedicació:** 37h 30m

Grup gran/Teoria: 8h

Grup mitjà/Pràctiques: 7h

Aprenentatge autònom: 22h 30m



## ACTIVITATS

### PRÀCTIQUES

**Descripció:**

Exercicis sobre els continguts teòrics del temari de l'assignatura.

**Objectius específics:**

Adquisició de les habilitats necessàries per a la resolució d'exercicis.

Adquisició de les habilitats necessàries per a la redacció correcta de solucions d'exercicis.

Desenvolupament de la competència genèrica Aprenentatge autònom.

**Material:**

Bibliografia bàsica i apunts disponibles a Atenea.

**Lliurament:**

La realització dels exercicis i altres activitats que consideri oportú el professor forma part de les Notes de Classes.

**Dedicació:** 48h

Grup gran/Teoria: 24h

Aprenentatge autònom: 24h

### TEORIA

**Descripció:**

Conceptes teòrics del temari de l'assignatura

**Objectius específics:**

Comprensió de conceptes teòrics.

Adquisició de les habilitats necessàries per a la redacció correcta de conceptes teòrics.

Desenvolupament de la competència genèrica Aprenentatge autònom.

**Material:**

Bibliografia bàsica i apunts disponibles a Atenea.

**Lliurament:**

No n'hi ha.

**Dedicació:** 72h

Grup mitjà/Pràctiques: 24h

Aprenentatge autònom: 48h

### PRESENTACIÓ I CLOENDA

**Descripció:**

Presentació i cloenda de l'assignatura.

**Objectius específics:**

Obtenir una visió de conjunt de l'assignatura.

**Material:**

No n'hi ha.

**Lliurament:**

No n'hi ha.

**Dedicació:** 2h

Grup gran/Teoria: 2h



## CONSOLIDACIÓ

**Descripció:**

Resolució per part del professor de dubtes dels estudiants sobre els continguts teòrics i pràctics del temari de l'assignatura.

**Objectius específics:**

Obtenció d'una visió de conjunt de les diferents parts del temari de l'assignatura.

Preparació dels diferents controls i exàmens.

Desenvolupament de la competència genèrica Aprenentatge Autònom.

**Material:**

Bibliografia bàsica i apunts disponibles a Atenea.

**Lliurament:**

No n'hi ha

**Dedicació:** 22h

Grup mitjà/Pràctiques: 4h

Aprenentatge autònom: 18h

## PRIMER CONTROL

**Descripció:**

Prova presencial escrita.

S'efectua a hores de classe, abans de l'examen parcial.

S'avaluen els continguts del primer mòdul de l'assignatura.

**Objectius específics:**

Contrastar les habilitats adquirides en la resolució d'exercicis i la redacció correcta de les solucions

**Material:**

No n'hi ha

**Lliurament:**

La nota d'aquest control forma part de la Primera Nota de Classe.

**Dedicació:** 1h

Grup gran/Teoria: 1h

## SEGON CONTROL

**Descripció:**

Prova presencial escrita.

S'efectua a hores de classe, entre l'examen parcial i el final.

S'avaluen els continguts del tercer mòdul de l'assignatura.

**Objectius específics:**

Contrastar les habilitats adquirides en la resolució d'exercicis i la redacció correcta de les solucions.

**Material:**

No n'hi ha

**Lliurament:**

La nota d'aquest control forma part de la Segona Nota de Classe.

**Dedicació:** 1h

Grup gran/Teoria: 1h



## EXAMEN PARCIAL

**Descripció:**

Prova presencial escrita.

S'efectua durant la setmana destinada a tal efecte, cap a la meitat del curs.

S'avaluen els continguts dels dos primers mòduls de l'assignatura.

**Objectius específics:**

Contrastar els coneixements adquirits sobre els conceptes teòrics i la seva correcta redacció.

Contrastar les habilitats adquirides en la resolució d'exercicis i la redacció correcta de les solucions.

**Material:**

Exàmens resolts d'anys anteriors disponibles a Atenea.

**Lliurament:**

La nota d'aquest examen representa el 25 % de la Nota Final.

En cas de no superar-lo, es recupera amb una nota de 5 si s'aprova l'Examen Final.

**Dedicació:** 2h

Grup gran/Teoria: 2h

## EXAMEN FINAL

**Descripció:**

Prova presencial escrita.

S'efectua en el dia destinat a tal efecte, un cop finalitzades les classes.

S'avaluen els continguts dels quatre mòduls de l'assignatura.

**Objectius específics:**

Contrastar els coneixements adquirits sobre els conceptes teòrics i la seva correcta redacció.

Contrastar les habilitats adquirides en la resolució d'exercicis i la redacció correcta de les solucions.

**Material:**

Exàmens resolts d'anys anteriors disponibles a Atenea.

**Lliurament:**

La nota d'aquest examen representa el 50 % de la Nota Final.

**Dedicació:** 2h

Grup gran/Teoria: 2h



## SISTEMA DE QUALIFICACIÓ

---

La Nota Final de l'assignatura s'obtéindrà a partir de les notes següents amb la ponderació que s'indica:

Nota de l'Examen Final: 50 %  
Nota de l'Examen Parcial: 25 %  
Primera Nota de Classe: 12.5 %  
Segona Nota de Classe: 12.5 %

La nota de l'Examen Final és l'obtinguda en l'examen corresponent.

La nota de l'Examen Parcial és, inicialment, l'obtinguda en l'examen corresponent.

La Primera i Segona Notes de Classe s'obtenen a partir de les notes del Primer i Segon Control i de la resta d'aspectes relacionats amb els mòduls 1 i 2 i els mòduls 3 i 4, respectivament, que el professor consideri oportú valorar (participació a les classes, lliurament d'exercicis, etc.)

Els resultats poc satisfactoris de l'examen parcial es podran reconduir si s'aprova l'examen final. A aquesta prova hi poden accedir tots els estudiants. Si s'ha suspès l'examen parcial i s'aprova l'examen final, la qualificació del parcial serà de 5.0

## NORMES PER A LA REALITZACIÓ DE LES PROVES.

---

En els exàmens i controls no està permès l'ús de cap mena de calculadora, ordinador, telèfon mòbil o similar. El professor o professora pot sol·licitar la identificació dels estudiants en qualsevol moment durant la realització d'un acte d'avaluació.

Les accions irregulars que poden conduir a una variació significativa de la qualificació d'una o més estudiantes o estudiants (per exemple copiar, deixar copiar,...) constitueixen una realització fraudulenta d'un acte d'avaluació. Aquesta acció comporta la qualificació descriptiva de suspens i numèrica de 0 de l'acte d'avaluació i de l'assignatura.

## BIBLIOGRAFIA

---

### Bàsica:

- Strang, Gilbert. Introduction to linear algebra. 4th ed. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press, 2009. ISBN 9780980232714.
- Burgos Román, Juan de. Álgebra lineal y geometría cartesiana [en línia]. 3a ed. Madrid: McGraw-Hill, 2006 [Consulta: 09/11/2020]. Disponible a: [http://www.ingebook.com/ib/NPcd/IB\\_BooksVis?cod\\_primaria=1000187&codigo\\_libro=4141](http://www.ingebook.com/ib/NPcd/IB_BooksVis?cod_primaria=1000187&codigo_libro=4141). ISBN 8448149009.



## RECURSOS

---

### Enllaç web:

- <http://atenea.upc.edu>
- <http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2005/>

### Altres recursos:

Transparències d'Àlgebra Lineal  
Rafel Amer, Francesc Carreras i Vicenç Sales.

Àlgebra Lineal. Exercicis  
Rafel Amer, Francesc Carreras i Vicenç Sales

Àlgebra lineal. Exercicis Resolts  
Rafel Amer, Francesc Carreras i Vicenç Sales

Un curs d'Àlgebra Lineal  
Rafel Amer i Francesc Carreras

Àlgebra Lineal. Problemes, exercicis i qüestions  
Rafel Amer i Francesc Carreras